2. Anwendungsaufgaben in mathematische Fragen übersetzen

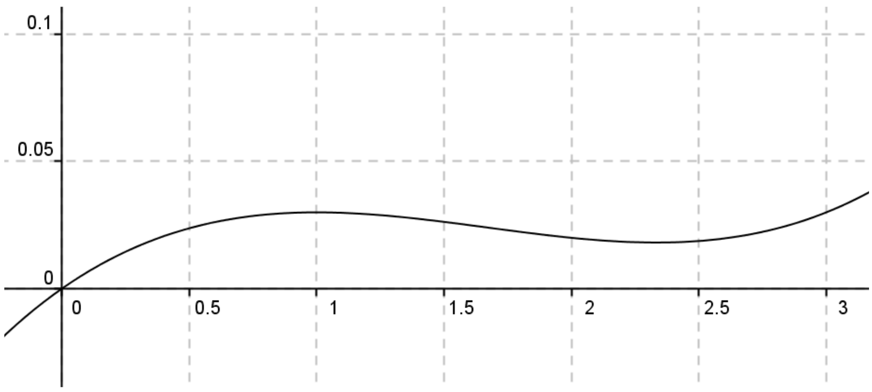
INFO:

Funktionen können als Modell der Wirklichkeit verwendet werden.
Wenn eine Funktion und ein Kontext gegeben sind, sind häufig folgende Aspekte wichtig:

- Die Funktion muss im Sachzusammenhang beschrieben und der Verlauf der Funktion im Kontext richtig interpretiert werden.
- Fragestellungen im Sachzusammenhang müssen in mathematische Fragen übersetzt werden können.
- Die Qualität der Modellfunktion muss untersucht werden; verschiedene Modelle werden miteinander verglichen; die Grenzen der Modelle werden untersucht (an welchen Stellen ist die Modellierung nicht mehr sinnvoll?)

Bedeutung der Ableitung
Die Ableitung entspricht der Steigung der Tangente in einem Punkt bzw. der momentanen Änderungsrate, die Steigung einer Sekante entspricht der durchschnittlichen Steigung bzw. der durchschnittlichen Änderungsrate.

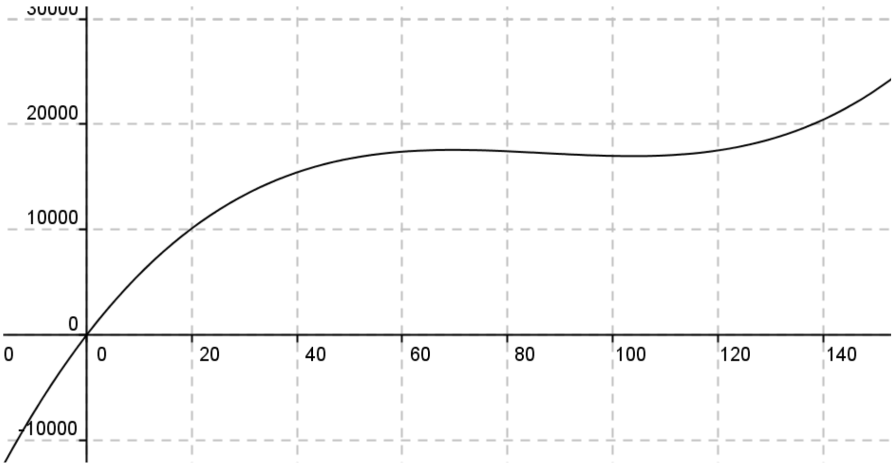
Beispiel 1 (Straßenverlauf)



Die Funktion $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}05x^2 + 0{,}07x$ beschreibt näherungsweise die Höhe (in km) einer Straße auf den ersten 2,5 km des Straßenverlaufs. Die Ableitung f ‘(x) entspricht der momentanen Steigung der Straße an einer Stelle x.
Die durchschnittliche Steigung der Straße auf dem ersten Kilometer ergibt sich durch die Rechnung: $m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$.
Die Steigung der Straße erreicht ein relatives Maximum bzw. Minimum, wenn die Ableitungsfunktion ein Maximum bzw. Minimum erreicht. Um diese zu bestimmen, müssen also die Extremwerte von f ‘(x) gesucht werden, diese entsprechen den Wendepunkten der Funktion f(x). Man muss aber auch noch überprüfen, wie steil die

Straße an den Randstellen des Definitionsbereichs ist, d.h. hier an den Stellen 0 und 2,5.

Beispiel 2 (Zuschauer im Fußballstadion)



Die Funktion $f(x) = 0{,}03x^3 - 7{,}8x^2 + 650$ beschreibt näherungsweise die Anzahl der Zuschauer, die sich x Minuten nach Einlass (90 Minuten vor Spielbeginn) in einem Fußballstadion befinden. Laut der Funktion wären z.B. nach 60 Minuten f(60)=17400 Zuschauer im Stadion.

Die Ableitungsfunktion $f`(x) = 0{,}09x^2 - 15{,}6x + 650$ beschreibt die momentane Änderungsrate, d.h. die Anzahl der Zuschauer, die pro Minute in das Stadion hineinkommen, z.B. $f´(0) = 650$ und $f´(60) = 38$ also kommen zu Beginn 650 Zuschauer pro Minute ins Stadion, eine Stunde nach Einlass kommen laut der Modellfunktion noch 38 Zuschauer pro Minute ins Stadion.

Wenn man den Verlauf der Funktion für x>120 untersucht, wird man feststellen, dass die Funktionswerte für x > 120 deutlich größer werden, z.B. $f(180) = 39240$ oder $f(240) = 121440$ Es ist nicht damit zu rechnen, dass die Zuschauerzahl während des Spiels oder sogar nach Ende des Spiels noch deutlich steigt. Das Modell könnte für den im Bild dargestellten Ausschnitt (0<x<120) den Sachverhalt sinnvoll modellieren, ist aber für größere Werte von x nicht geeignet.

Arbeitsblatt:

Übersetzung von Anwendungsaufgaben in mathematische Fragestellungen

Kontextbezogene Frage	**Mathematische Fragestellung**
f(t) beschreibt den zurückgelegten Weg in m nach t Minuten. Wann ist die Geschwindigkeit am größten?	
f(x) beschreibt die Anzahl der Zuschauer in einem Stadion nach x Minuten. Wann ist der Andrang an den Kassen am größten?	
f(x) beschreibt die Anzahl der Zuschauer in einem Stadion nach x Minuten. Wann sind 10.000 Zuschauer im Stadion?	
f(x) beschreibt die Höhe eines Baumes (in m) nach x Jahren. In welchem Jahr wächst der Baum am meisten?	
f(x) beschreibt die Höhe eines Segelflugzeugs in m nach x Minuten. Wann nimmt die Steiggeschwindigkeit ab?	

Arbeitsblatt: (Lösung)

Übersetzung von Anwendungsaufgaben in mathematische Fragestellungen

Kontextbezogene Frage	**Mathematische Fragestellung**
f(t) beschreibt den zurückgelegten Weg in m nach t Minuten. Wann ist die Geschwindigkeit am größten?	Die Geschwindigkeit wird durch die Ableitung f '(t) beschrieben. Gesucht ist also nach dem Maximum der Ableitungs-funktion f´(x).
f(x) beschreibt die Anzahl der Zuschauer in einem Stadion nach x Minuten. Wann ist der Andrang an den Kassen am größten?	Die Ableitungsfunktion entspricht der Änderungsrate, d.h. der Anzahl an Zuschauern, die ins Stadion kommen. Gesucht ist also das Maximum der Ableitungsfunktion.
f(x) beschreibt die Anzahl der Zuschauer in einem Stadion nach x Minuten. Wann sind 10.000 Zuschauer im Stadion?	Gesucht ist der x-Wert für den gilt: f(x)=10.000
f(x) beschreibt die Höhe eines Baumes (in m) nach x Jahren. In welchem Jahr wächst der Baum am meisten	Die Ableitungsfunktion entspricht der Wachstumsgeschwindigkeit. Gesucht ist nach dem Zeitpunkt der größten Wachstumsgeschwindigkeit, also nach dem Maximum der Ableitungsfunktion.
f(x) beschreibt die Höhe eines Segelflugzeugs in m nach x Minuten. Wann nimmt die Steiggeschwindigkeit ab?	Die Ableitungsfunktion spiegelt die Steiggeschwindigkeit des Flugzeugs wider. Gesucht ist die Bereich, in dem die Ableitungsfunktion abnimmt, d.h. der Graph der Funktion f(x) rechtsgekrümmt ist.